№ 1.

Найти значение выражения:

$$5 \cdot \frac{\sqrt{7-2\sqrt{6}}}{\sqrt{7+2\sqrt{6}}} + 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3+\sqrt{6}}}{\sqrt{3-\sqrt{6}}}$$

Решение: $$5 \cdot \frac{\sqrt{7-2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{7-2\sqrt{6}}}{\sqrt{7+2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{7-2\sqrt{6}}} + 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3+\sqrt{6}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{6}}}{\sqrt{3-\sqrt{6}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{6}}} = 5 \cdot \frac{\sqrt{(7-2\sqrt{6})^2}}{\sqrt{7^2-(2\sqrt{6})^2}} + 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{(3+\sqrt{6})^2}}{\sqrt{3^2-(\sqrt{6})^2}} =$$

$$= \frac{5 \cdot |7-2\sqrt{6}|}{\sqrt{49-24}} + \frac{2\sqrt{3} \cdot |3+\sqrt{6}|}{\sqrt{9-6}} =$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{т.к. } 7-2\sqrt{6} > 0, \text{ то } |7-2\sqrt{6}| = 7-2\sqrt{6} \\ \text{т.к. } 3+\sqrt{6} > 0, \text{ то } |3+\sqrt{6}| = 3+\sqrt{6} \end{array}\right]$$

$$= \frac{\cancel{5} \cdot (7-2\sqrt{6})}{\cancel{5}} + \frac{2\cancel{\sqrt{3}} \cdot (3+\sqrt{6})}{\cancel{\sqrt{3}}} =$$

$$= 7 - 2\sqrt{6} + 2(3+\sqrt{6}) = 7 - 2\sqrt{6} + 6 + 2\sqrt{6} =$$

$$= 7 + 6 = 13.$$

Ответ: 13.

№ 2

Сколько решений (т.е. различных пар $(x;y)$) в натуральных числах имеет уравнение $\log_4 5^{xy} = 3\log_{64} 5^{2019}$

Решение: $\log_4 5^{xy} = 3\log_{4^3} 5^{2019}$

$$\log_4 5^{xy} = \frac{3}{3}\log_4 5^{2019}$$

$$\log_4 5^{xy} = \log_4 5^{2019}$$

$$xy \log_4 5 = 2019 \log_4 5 \quad | : \log_4 5$$

$$xy = 2019$$

$$\begin{array}{r|l} 2019 & 3 \\ 673 & 673 \\ 1 & \end{array}$$

$(1; 2019)$

$(2019; 1)$

$(3; 673)$

$(673; 3)$

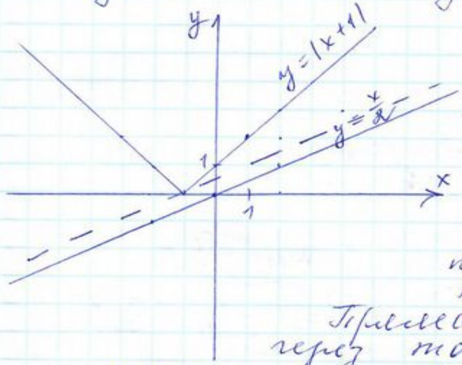
Ответ: 4 решения

3.

При каком значении a, уравнение $|x+1| = \frac{x}{2} + a$, имеет одно решение, два решения?

Решение: Решим графически данное уравнение

$y = |x+1|$ и $y = \frac{x}{2} + a$



Построим график функции $y = \frac{x}{2}$

Все прямые $y = \frac{x}{2} + a$ будут параллельны прямой $y = \frac{x}{2}$

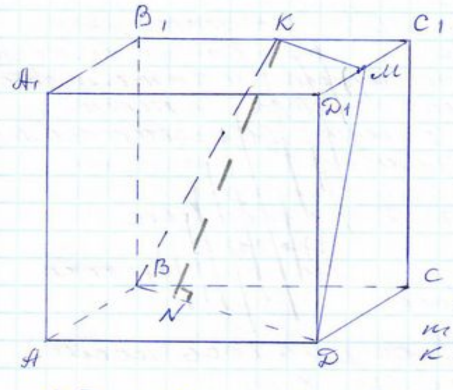
Прямая, проходящая через точку $(-1; 0)$ будет имет одну общую точку с графиком функции $y = |x+1|$

Подставив координаты точки $(-1; 0)$ в уравнение $y = \frac{x}{2} + a$, найдём a

$-\frac{1}{2} + a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

Значит, при $a = \frac{1}{2}$ уравнение имеет одно решение и при $a > \frac{1}{2}$, два решение

№4.



Дано: куб

Через т. B, D и середину D_1C_1 проведено сечение

$S_{сеч} = 144$ см^2

Найти: $S_{полн}$ куба

Решение: построим сечение; соединим точки B и D; D и M. Через т. M проведем $\parallel$ прямую BD, т.е. $KM \parallel BD \Rightarrow$ K - середина B_1C_1

$BDMK$ - равнобедренная трапеция (т.к. $BM \parallel KM$ по построению, $KB = MD$)

Пусть ребро куба равно a, тогда $BD = \sqrt{a^2+a^2} = \sqrt{2}a$

$KM = \frac{\sqrt{2}}{2}a$; $KN \perp BD$; $BN = \frac{BD - KM}{2} = \frac{\sqrt{2}a - \frac{\sqrt{2}}{2}a}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}a$

DM найдем из $\triangle DD_1M$: $DM = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$

KN найдем из $\triangle KNB$: $KN = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)^2} =$

$= \sqrt{\frac{5a^2}{4} - \frac{2a^2}{16}} = \sqrt{\frac{18a^2}{16}} = \frac{3\sqrt{2}a}{4}$

$S_{тр} = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h$; $144 = \frac{\sqrt{2}a + \frac{\sqrt{2}a}{2}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}a}{4}$

$\Rightarrow a^2 = 128$

S одной грани куба $= 128$, тогда

$S_{полное} = 128 \cdot 6 = 768$ см^2

Ответ: 768 см^2

№5

В колбе было 200г 80% спирта. Провизор отлил из колбы некоторое количество этого спирта и затем добавил в нее столько же воды чтобы получить 60% спирт. Сколько граммов воды добавил провизор?

Решение: Пусть х гр добавил воды провизор. Тогда

$200 \cdot 0,8 = 160$ гр – масса чистого спирта в колбе.

$(200 - x)$ гр раствора осталось после того как отлили х гр

$0,8 \cdot (200 - x)$ – чистого спирта в оставшемся растворе.
Когда к раствору добавили х гр воды, то масса раствора снова стала 200 гр, а концентрация 60%.

Получим уравнение

$$\frac{0,8 \cdot (200 - x)}{200} \cdot 100 = 60$$

$$0,8 \cdot (200 - x) = 120$$

$$200 - x = 150$$

$$x = 200 - 150$$

$$x = 50$$

Ответ: 50 гр. воды

№6

Группа студентов из 30 чел решали контрольную работу в которой две задачи. По итогам выполнения работы выяснилось, что 22 студента решили первую задачу, 24 студента решили вторую задачу, а трое студентов не справились с контрольной работой. Сколько студентов решили обе задачи?

Решение: $30 - 3 = 27$ чел – решили либо первую, либо вторую, либо обе задачи

27 чел.

1-ю ↙ ↘ 2-ю

22 чел. 24 чел.

$27 - 22 = 5$ чел решили 1-ю задачу
$27 - 24 = 3$ чел решили 2-ю задачу
} 8 чел.

$27 - 8 = 19$ чел. решили обе задачи

Ответ: 19 чел.

№7

Вычислите: $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}+\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

Решение: воспользуемся формулой $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$

$\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}+\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)\cdot$

$\cdot\cos\left(\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)+\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)\cdot\sin\left(\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}+\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}=$

$=\frac{2\sqrt{2}}{9}+\sqrt{\frac{8}{9}}\cdot\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{9}+\frac{2\sqrt{3}}{9}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$

Ответ: $\frac{4\sqrt{2}}{9}$

№8

Решение: Пусть первоначальный вклад был x р, тогда получим уравнение

$\frac{1}{5}x+\frac{5}{16}\cdot\left(x-\frac{1}{5}x\right)+2880+\frac{1}{4}x=x$

Решив это уравнение, получим

$x=9600$

Ответ: 9600 р

№9

Найдите значение выражения

$8\sin10^\circ\cdot\cos20^\circ\cdot\cos40^\circ$

$\frac{8\sin10^\circ\cdot\cos20^\circ\cdot\cos40^\circ\cdot\cos10^\circ}{\cos10^\circ}=$

$=\frac{\overset{4\cdot2}{\cancel{8}}(\sin10^\circ\cdot\cos10^\circ)\cos20^\circ\cdot\cos40^\circ}{\cos10^\circ}=$

$=\frac{\overset{2\cdot2}{4}(\sin20^\circ\cdot\cos20^\circ)\cdot\cos40^\circ}{\cos10^\circ}=$

$=\frac{2\sin40^\circ\cdot\cos40^\circ}{\cos10^\circ}=\frac{\sin80^\circ}{\cos10}=$

$=\frac{\sin(90^\circ+10^\circ)}{\cos10^\circ}=\frac{\cos10^\circ}{\cos10^\circ}=1.$

Ответ: 1

№10

Решение: Весь путь возьмем за 1, тогда на первую половину пути автомобиль потратил $\frac{\frac{1}{2}}{40}=\frac{1}{80}$ часа, на вторую – $\frac{\frac{1}{2}}{60}=\frac{1}{120}$ часа.

Средняя скорость на всем пути равна $\frac{1}{\frac{1}{80}+\frac{1}{120}}=\frac{1}{\frac{5}{240}}=48$ км/ч.

Ответ: 48

№ 11.

Известно, что $\frac{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}{\sqrt[3]{a^2\cdot(a-b)^2}}\cdot\frac{a^{\frac{2}{3}}(\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3})}{b^2\cdot(a-b)^{\frac{1}{3}}}=7$

Определите во сколько раз a больше b, если оба эти числа положительные.

Решение: $\frac{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}{\cancel{a^{\frac{2}{3}}}\cdot(a-b)^{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{\cancel{a^{\frac{2}{3}}}(\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3})}{b^2\cdot(a-b)^{\frac{1}{3}}}=7.$

$$\frac{(\sqrt{a^3})^2-(\sqrt{b^3})^2}{b^2\cdot(a-b)}=7$$

$$\frac{a^3-b^3}{b^2\cdot(a-b)}=7$$

$$\frac{\cancel{(a-b)}(a^2+ab+b^2)}{b^2\cdot\cancel{(a-b)}}=7$$

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{a}{b}+1=7$$

Пусть $\frac{a}{b}=t$, тогда

$$t^2+t-6=0$$

$$t_1=3 \qquad t_2=-2$$

Т.к. $a>0$ и $b>0$, то $t=-2$ не уд. условию задачи

$$\frac{a}{b}=3$$

Ответ: 3